(12) DEMANDE INTERNATIONALE PUBLIÉE EN VERTU DU TRAITÉ DE COOPÉRATION EN MATIÈRE DE BREVETS (PCT)

(19) Organisation Mondiale de la Propriété Intellectuelle
Bureau international

(43) Date de la publication internationale
18 janvier 2001 (18.01.2001)

PCT

(10) Numéro de publication internationale
WO 01/04742 A1

(51) Classification internationale des brevets[7]: G06F 7/72

(21) Numéro de la demande internationale:
PCT/FR00/01979

(22) Date de dépôt international: 7 juillet 2000 (07.07.2000)

(25) Langue de dépôt: français

(26) Langue de publication: français

(30) Données relatives à la priorité:
99/08949 9 juillet 1999 (09.07.1999) FR

(71) Déposant *(pour tous les États désignés sauf US)*: OBERTHUR CARD SYSTEMS SAS [FR/FR]; 102, boulevard Malesherbes, F-75017 Paris (FR).

(72) Inventeur; et
(75) Inventeur/Déposant *(pour US seulement)*: KNUDSEN, Erik [FR/FR]; 16, rue Alexandre Dumas, F-75011 Paris (FR).

(74) Mandataire: CABINET BONNET-THIRION; 12, avenue de la Grande Armée, Boîte postale 966, F-75829 Paris (FR).

(81) États désignés *(national)*: CA, JP, US.

(84) États désignés *(régional)*: brevet européen (AT, BE, CH, CY, DE, DK, ES, FI, FR, GB, GR, IE, IT, LU, MC, NL, PT, SE).

Publiée:
— *Avec rapport de recherche internationale.*

En ce qui concerne les codes à deux lettres et autres abréviations, se référer aux "Notes explicatives relatives aux codes et abréviations" figurant au début de chaque numéro ordinaire de la Gazette du PCT.

(54) Title: COMPUTING METHOD FOR ELLIPTIC CURVE CRYPTOGRAPHY

(54) Titre: PROCEDE DE CALCUL POUR LA CRYPTOGRAPHIE A COURBE ELLIPTIQUE

(57) Abstract: The invention concerns fast cryptographic method between two entities exchanging data via a non-secure communication channel. The method, for example for forming a common key between two entities (A, B) each having a secret key (a, b) and using a public key (P) formed by a point of an elliptic curve (E), comprises at least a step which consists in multiplying said odd order point (P) by an integer and said phase comprises operations called additions and halving , the latter operation characterising the invention.

(57) Abrégé: Procédé de cryptographie rapide entre deux entités échangeant des informations à travers un canal de communication non sécurisé. Le procédé, par exemple pour la constitution d'une clef commune entre deux entités (A, B) possédant chacune une clef secrète (a, b) et faisant toutes deux appel à une clef publique (P) constituée par un point d'une courbe elliptique (E), comprend au moins une phase consistant à multiplier ledit point (P) d'ordre impair par un entier et cette phase comprend des opérations dites "additions" et "divisions par deux", cette dernière opération étant caractéristique de l'invention.

WO 01/04742 A1

PROCEDE DE CALCUL POUR LA CRYPTOGRAPHIE A COURBE ELLIPTIQUE

L'invention se rapporte à un procédé de cryptographie mis en œuvre entre deux entités échangeant des informations à travers un canal de communication non sécurisé, par exemple un réseau câblé ou hertzien et permettant d'assurer la confidentialité et l'intégrité des transferts d'informations entre ces deux entités. L'invention concerne plus particulièrement un perfectionnement aux cryptosystèmes mettant en œuvre des calculs sur une courbe elliptique. Le perfectionnement permet principalement de réduire les temps de calcul.

On connaît un protocole de cryptographie, plus particulièrement utilisé pour réaliser un échange de clefs sécurisé entre deux entités. Il est connu sous l'appellation "Echange de Clefs de Diffie-Hellmann" ou "ECDH". Sa mise en œuvre nécessite l'utilisation d'"un groupe au sens mathématique du terme. Une courbe elliptique du type :

$$y^2 + xy = x^3 + \alpha x^2 + \beta$$

peut constituer un groupe utilisable dans un tel procédé ;

On sait que si P= (x,y) appartient à la courbe elliptique E, on peut définir un "produit" ou "multiplication scalaire " du point P de E par un entier m. Cette opération est définie comme suit :

$$[m]\,P = P + P + P \ldots + P \text{ (m fois)}$$

On sait que dans un algorithme du type "ECDH", on utilise la multiplication par 2 d'un point P choisi d'une telle courbe elliptique. Cette opération s'appelle "doublement de point" et s'inscrit dans un processus itératif de doublement-et-addition. Une telle multiplication par 2 requiert du temps.

La partie la plus lente du protocole d'Echange de Clés de Diffie-Hellman (ECDH) est la multiplication d'un point de la courbe non connu à l'avance par un scalaire aléatoire. On ne considère ici que les courbes elliptiques définies sur un corps de caractéristique 2 ; c'est un choix répandu pour les implémentations, car l'addition dans un tel corps correspond à l'opération "'ou exclusif".

Il est connu que la multiplication par un scalaire peut être accélérée pour les courbes définies sur un corps de faible cardinalité en utilisant le morphisme de Frobenius. On peut choisir les courbes de sorte qu'aucune des attaques

connues ne s'applique à elles. Cependant, il est évidemment préférable, au moins sur le plan du principe, de pouvoir choisir la courbe que l'on veut utiliser dans une classe de courbes aussi générale que possible. La méthode décrite dans l'invention s'applique, dans sa version la plus rapide, à la moitié des courbes elliptiques. De plus, d'un point de vue cryptographique, cette moitié est la meilleure. Avant de donner le principe de la méthode, on rappelle les concepts de base.

Pour illustrer simplement, prenons la courbe elliptique (E) représentable géométriquement définie sur l'ensemble R des nombres réels par l'équation $y^2 + y = x^3 - x^2$, représentée sur la figure 1 où une ligne horizontale représente un nombre entier m, une ligne verticale représente un nombre entier n et chaque intersection de telles lignes horizontale et verticale représente la paire de coordonnées entières (m, n).

(E) passe par un nombre fini de points à coordonnées entières, et toute sécante à (E) issue d'un tel point recoupe (E) en 2 points, éventuellement confondus (cas des tangentes à la courbe).

L'opération d'addition entre deux quelconques de ces points A et B est définie de la manière suivante : soit B_1 le point où la droite (AB) recoupe (E) ; la verticale de B_1 recoupe (E) en C = A + B.

Dans le cas particulier où (AB') est tangente à (E), C' est la somme cherchée.

Le point O, "intersection de toutes les verticales", est appelé point à l'infini de (E) et est l'élément neutre de l'addition ainsi définie, puisqu'en appliquant la construction géométrique de définition de l'addition, on a bien : A+O = O+A = A.

Le doublement de A, noté [2]A et défini comme : A + A, est donc le point B', la droite (Ax) étant tangente en A à (E).

En appliquant au point B' la construction d'addition de A, on obtiendrait le point [3]A, et ainsi de suite : c'est la définition du produit [n]A d'un point par un entier.

La présente invention concerne en fait une famille de courbes elliptiques, non représentables géométriquement mais définies comme suit :

Soit n un entier donné, F_{2^n} le corps de 2^n éléments, et $\overline{F_{2^n}}$ sa clôture algébrique. Soit O le point à l'infini. On appelle courbe elliptique E non supersingulière définie sur F_{2^n} l'ensemble :

$$E = \{(x,y) \in \overline{F_{2^n}} \times \overline{F_{2^n}} \mid y^2 + xy = x^3 + \alpha x^2 + \beta\} \cup \{O\} \quad \alpha, \beta \in F_{2^n},\ \beta \neq 0$$

Les éléments de E sont habituellement appelés "points". Il est bien connu que E peut être doté d'une structure de groupe abélien en prenant le point à l'infini comme élément neutre. Dans ce qui suit, on considère le sous-groupe fini des points rationnels de E, défini par :

$$E(F_{2^n}) = \{(x,y) \in F_{2^n} \times F_{2^n} \mid y^2 + xy = x^3 + \alpha x^2 + \beta\} \cup \{O\} \quad \alpha, \beta \in F_{2^n},\ \beta \neq 0$$

N étant l'ensemble des entiers naturels, pour tout $m \in N$, on définit dans E l'application "multiplication par m" par :

$$[m] : E \rightarrow E$$

$$P \rightarrow P + \ldots\ldots + P \text{ (m fois) et } \forall P \in E : [O]P = O$$

On note E[m] le noyau de cette application. Les points du groupe E[m] sont appelés les points de m-torsion de E. La structure de groupe des points de m-torsion est bien connue.

En se limitant au cas où m est une puissance de 2, on a :

$$\forall k \in N : E[2^k] \cong Z/2^k Z$$

où Z est l'ensemble des entiers relatifs.

Comme $E(F_{2^n})$ est un sous-groupe fini de E, il existe $k' \geq 1$ tel que $E[2^k]$ est contenu dans $E(F_{2^n})$ si et seulement si $k \leq k'$. Si on se limite aux courbes elliptiques E pour lesquelles k'=1, la structure de $E(F_{2^n})$ est :

$$E(F_{2^n}) = G \times \{O, T_2\}$$

où G est un groupe d'ordre impair et T_2 désigne le point unique d'ordre 2 de E. On dit qu'une telle courbe a une 2- torsion minimale.

On est maintenant en mesure d'expliquer le but de l'invention. La multiplication par deux, n'est pas injective lorsqu'elle est définie sur E ou $E(F_{2^n})$, car elle a pour noyau : $E[2] = \{O, T_2\}$.

Par ailleurs, si on réduit le domaine de définition de la multiplication par 2 à un sous-groupe d'ordre impair $G \subset E(F_{2^n})$, la multiplication par 2 devient bijective.

Il en résulte que la multiplication par 2 admet sur ce sous-groupe une application inverse que nous appellerons division par 2 :

$$[1/2] : G \rightarrow G$$

$$P \rightarrow Q \text{ tel que : } [2]Q = P$$

On note [1/2] P le point de G auquel l'application de doublement fait correspondre le point P.

Pour tout $k \geq 1$, on écrit :

$$\left[\frac{1}{2^k}\right] = \left[\frac{1}{2}\right] \circ \left[\frac{1}{2}\right] \circ \ldots\ldots \circ \left[\frac{1}{2}\right]$$

Pour représenter k compositions de l'application de division par 2 avec elle-même.

De façon générale l'invention concerne donc un procédé de cryptographie mis en œuvre entre deux entités échangeant des informations à travers un canal de communication non sécurisé, du type comprenant au moins une phase opératoire consistant à multiplier un point d'ordre impair d'une courbe elliptique non supersingulière par un entier, caractérisé en ce qu'une telle phase opératoire comprend des additions et des divisions par deux de points de ladite courbe elliptique; où l'addition de points est une opération connue, et la division par deux d'un point P est définie comme le point unique D d'ordre impair tel que [2]D=P, un tel point étant noté $\left[\frac{1}{2}\right] P$, et l'opération de division par 2 : $\left[\frac{1}{2}\right]$.

L'application de division par 2 est intéressante pour la multiplication scalaire d'un point d'une courbe elliptique pour la raison suivante : si l'on travaille en coordonnées affines, il est possible de remplacer toutes les multiplications de point par 2 d'une multiplication scalaire par des divisions de point par 2.

La division par 2 d'un point est bien plus rapide à calculer que sa multiplication par 2. D'un point de vue cryptographique, il est bon d'avoir à choisir parmi le plus grand nombre de courbes possible, et on a coutume d'utiliser une courbe pour laquelle la 2-torsion de $E(F_{2^n})$ est minimale ou isomorphique à Z/4Z.

Pour un corps F_{2^n} donné, les courbes elliptiques de 2-torsion minimale constituent exactement la moitié de l'ensemble des courbes elliptiques définies sur F_{2^n}. C'est pourquoi, bien qu'elle ne soit pas totalement générale, la méthode décrite s'applique, dans sa version la plus rapide, à une bonne partie des courbes intéressantes en cryptographie. Elle est toujours applicable dans le cas où les éléments du corps sont représentés dans une base normale. Dans le cas d'une base polynomiale, l 'espace mémoire requis est de l'ordre de $O(n^2)$ bits.

Certains exemples sont donnés ci-dessous, en référence aux dessins annexés dans lesquels :

- la figure 1 est un graphe illustrant une courbe elliptique très particulière mais représentable géométriquement, permettant de clarifier des opérations élémentaires mises en œuvre dans le cadre de l'invention, ces opérations étant explicitées ci-dessus ;

- la figure 2 est un schéma illustrant des échanges d'informations conformes à l'invention, entre deux entités ;

- les figures 3 à 6 sont des organigrammes explicitant certaines applications conformes à l'invention ; et

- la figure 7 est un schéma-bloc d'un autre système d'échange d'informations entre deux entités A et B, susceptible de mettre en œuvre un processus de cryptographie conforme à l'invention.

On va montrer comment calculer [1/2] $P \in G$ à partir de $P \in G$. Puis on montrera comment remplacer les doublements de points par des divisions par 2 pour exécuter une multiplication par un scalaire.

On utilisera la représentation affine habituelle d'un point : P=(x,y) et la représentation : (x, λ_p) avec $\lambda_p = x+y / x$

On tire de la deuxième représentation $y = x (x + \lambda_p)$ qui n'utilise qu'une multiplication.

En procédant ainsi, pour multiplier un point par un scalaire, on économise les multiplications en calculant les résultats intermédiaires à l'aide de la représentation (x, λ_p) et on ne détermine la coordonnée de la représentation affine qu'en fin de calcul.

La division par deux d'un point P s'obtient de la façon suivante :

Soit à calculer [1/2] P à partir de P. On considère pour cela les deux points de E :

$$P = (x,y) = (x, x\,(x + \lambda_p))$$

$$\text{et } Q = (u,v) = (u, u\,(u + \lambda_Q))$$

tels que : $[2]Q = P$

Les formules de multiplication par 2 connues donnent

$$\lambda_Q = u + v/u \qquad (1)$$

$$x = \lambda_Q^2 + \lambda_Q + \alpha \qquad (2)$$

$$y = (x+u)\,\lambda_Q + x + v \qquad (3)$$

Multipliant (1) par u et reportant la valeur de v ainsi obtenue dans (3), ce système devient :

$$v = u\,(u + \lambda_Q)$$

$$\lambda_Q^2 + \lambda_Q = \alpha + x$$

$$y = (x + u)\,\lambda_Q + x + u^2 + u\,\lambda_Q = u^2 + x\,(\lambda_Q + 1)$$

ou, puisque $y = x\,(x + \lambda_p)$:

$$\lambda_Q^2 + \lambda_Q = \alpha + x \qquad (i)$$

$$u^2 = (x\,(\lambda_Q + 1) + y = (\lambda_Q + \lambda_p + x + 1) \qquad (ii)$$

$$v = u\,(u + \lambda_Q) \qquad (iii)$$

En partant de $P = (x,y) = (x, x\,(x + \lambda_p))$ en coordonnées affines ou en représentation (x, λ_p), ce système d'équations détermine les deux points :

$$[1/2]\,P \in G \text{ et } [1[/2]\,P + T_2 \in E(F_{2^n}) \setminus G$$

qui donnent P par multiplication par 2. La propriété qui suit permet de la distinguer.

Soit E une courbe elliptique à 2-torsion minimale, et $P \in E(F_{2^n}) = G \times \{O, T_2\}$ l'un de ses éléments d'ordre impair.

Soit $Q \in \{[1/2]\,P, [1/2]\,P + T_2\}$ et Q_1 l'un des deux points de E tels que $[2]Q_1 = Q$.

On a la condition nécessaire et suffisante :

$$Q + [1/2]P \Leftrightarrow Q_1 \in E(F_{2^n}) \qquad (a)$$

On en déduit qu'il est possible de tester si Q = [1/2] P en appliquant les formules (i), (ii) et (iii) à Q et en vérifiant si l'un de points obtenus appartient à $E(F_{2^n})$.

Ce procédé peut être étendu à une courbe elliptique arbitraire $E(F_{2^n}) = G \times E[2^k]$. Pour cela on applique k fois les formules (i), (ii) et (iii) : la 1ère fois à Q, pour obtenir Q_1, tel que [2] Q_1 = Q; la ième fois à Q_{i-1} pour obtenir un point Q_i, tel que [2] $Q_i = Q_{i-1}$. Le point résultat Q_k sera de la forme $\left[\frac{1}{2^{k+1}}\right] P + T_{2^{k+1}}$ si et seulement si Q = [1/2]P + T_2 et il sera de la forme $\left[\frac{1}{2^{k+1}}\right] P + T_{2^i}$ avec $0 \leq i \leq k$ si et seulement si Q = [1/2]P. On a donc la condition nécessaire et suffisante :

$$Q = [1/2]P \Leftrightarrow Q_K \in E(F_{2^n})$$

Ce procédé est évidemment long si k est grand.

La relation (a) montre que l'on peut savoir si Q = [1/2]P ou Q = [1/2]P + T_2 en regardant si les coordonnées de Q_1, appartiennent à F_{2^n} ou à un sur-corps de F_{2^n}. Comme Q_1 est déterminé par les équations (i), (ii) et (iii), nous avons à étudier les opérations utilisées dans la résolution de ces équations qui ne sont pas internes au corps, mais ont leur résultat dans un sur-corps de F_{2^n}. Le seul cas possible est celui de la résolution de l'équation du 2nd. degré (i) : on doit aussi calculer une racine carrée pour calculer la 1ère coordonnée de Q_1, mais en caractéristique 2 la racine carrée est une opération interne au corps. On a donc :

$$Q = (u, v) = [1/2]\,P \Leftrightarrow \exists \lambda \in F_{2^n} : \lambda^2 + \lambda = \alpha + u$$

Cette condition nécessaire et suffisante s'écrit aussi, puisque la racine carrée est interne au corps :

$$Q = (u, v) = [1/2]\,P \Leftrightarrow \exists \lambda \in F_{2^n} : \lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u^2$$

La relation précédente permet d'optimiser l'algorithme énoncé ci-dessous dans les cas où le temps de calcul de la racine carrée n'est pas négligeable.

Pour $P \in G$, les 2 solutions de (i) sont $\lambda_{[1/2]P}$ et $\lambda_{[1/2]P} + 1$, et on déduit de (ii) que les 1ères coordonnées des points associés sont u et $(u + \sqrt{x})$. On peut

donc en déduire un algorithme permettant de calculer [1/2]P de la façon suivante :

Si F_{2^n} est un corps fini de 2^n éléments, $E(F_{2^n})$ est le sous-groupe d'une courbe elliptique E, défini par :

$$E(F_{2^n}) = \{(x,y) \in F_{2^n} \times F_{2^n} \mid y^2 + xy = x^3 + \alpha x^2 + \beta\} \cup \{O\} \quad \alpha, \beta \in F_{2^n}, \ \beta \neq O,$$

et $E[2^k]$ est l'ensemble des points P de ladite courbe elliptique tels que P, additionné 2^k fois à lui même donne l'élément neutre O avec k entier supérieur ou égal à 1, alors, un point P = (x,y) de ladite courbe elliptique donne par ladite division par deux le point $\left[\frac{1}{2}\right] P = (u_o, v_o)$ de ladite courbe elliptique, obtenu en effectuant les opérations suivantes illustrées par l'organigramme de la figure 3 :

- on cherche une première valeur λ_o telle que $\lambda_o^2 + \lambda_o = \alpha + x$
- on calcule une seconde valeur u_o^2 telle que $u_o^2 = x(\lambda_o + 1) + y$
- si k vaut 1, on cherche si l'équation : $\lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u_o^2$ a des solutions dans F_{2^n},
- dans l'affirmative on calcule ladite division par deux par :

$$u_o = \sqrt{u_0^2}$$

$$v_o = u_o (u_o + \lambda_o)$$

et $$\left[\frac{1}{2}\right] P = (u_o, v_o)$$

- dans la négative, on ajoute x à ladite deuxième valeur u_o^2 et on ajoute 1 à ladite première valeur λ_o pour calculer ladite division par deux comme dans l'opération précédente ;
- si k est plus grand que 1, on effectue un calcul itératif consistant à :

chercher une valeur λ_i, telle que $\lambda_i^2 + \lambda_i = \alpha + u_{i-1}$

puis calculer la valeur u^2_i telle que $u^2_i = u_{i-1}(\lambda_i + \lambda_{i-1} + u_{i-1} + 1)$

en incrémentant i à partir de i=1 jusqu'à obtenir la valeur u_{k-1}^2

- on cherche si l'équation $\lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u^2_{k-1}$ a des solutions dans F_{2^n}

- dans l'affirmative on calcule ladite division par deux par :

$$u_o = \sqrt{u_0^{\,2}}$$

$$v_o = u_o (u_o + \lambda_o)$$

et $\left[\frac{1}{2}\right] P = (u_o, v_o)$

- dans la négative, on ajoute x à ladite deuxième valeur u_o^2 et on ajoute 1 à ladite première valeur λ_o pour calculer ladite division par deux comme dans l'opération précédente.

Si on choisit de représenter le point $\left[\frac{1}{2}\right] P = (u_o, v_o)$ de la courbe elliptique par (u_o, λ_o) avec $\lambda_o = u_0 + v_o / u_0$, alors l'algorithme est conforme à l'organigramme de la figure 4 où :

- on cherche une première valeur λ_o telle que $\lambda_o^2 + \lambda_o = \alpha + x$
- on calcule une seconde valeur u_o^2 telle que : $u_o^2 = x (\lambda_o + 1) + y$,
- si k vaut 1, on cherche si l'équation : $\lambda^2{}_0 + \lambda_0 = \alpha^2 + u^2{}_0$ a des solutions dans F_{2^n},
- dans l'affirmative on calcule ladite division par deux par :

$$u_o = \sqrt{u_0^{\,2}}$$

et : $\left[\frac{1}{2}\right] P = (u_o, \lambda_o)$

- dans la négative, on ajoute x à ladite deuxième valeur u_o^2 et on ajoute 1 à ladite première valeur λ_o pour calculer ladite division par deux comme dans l'opération précédente ;
- si k est plus grand que 1, on effectue un calcul itératif consistant à :

chercher une valeur λ_i, telle que $\lambda_i^{\,2} + \lambda_i = \alpha + u_{i-1}$

puis calculer la valeur u_i^2 telle que $u_i^2 = u_{i-1} (\lambda_i + \lambda_{i-1} + u_{i-1} + 1)$

en incrémentant i à partir de i = 1jusqu'à obtenir la valeur $u^2{}_{k-1}$

- on cherche si l'équation $\lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u^2_{k-1}$ a des solutions dans F_{2^n}

- dans l'affirmative on calcule ladite division par deux par :

$$u_o = \sqrt{u_0^{\,2}}$$

$$\text{et } \left[\frac{1}{2}\right]P = (u_o, \lambda_o)$$

- dans la négative, on ajoute x à ladite deuxième valeur u_o^2 et on ajoute 1 à ladite première valeur λ_o pour calculer ladite division par deux comme dans l'opération précédente.

Si on choisit de représenter le point P = (x,y) par (x, λ_p) en posant λ_p = x+y/x qui donne par ladite division par deux le point $\left[\frac{1}{2}\right]P = (u_o,v_o)$ de ladite courbe elliptique alors l'algorithme est conforme à l'organigramme de la figure 5 où :

- on cherche une première valeur λ_o telle que $\lambda_o^2 + \lambda_o = \alpha + x$
- on calcule une seconde valeur u_o^2 telle que $u_o^2 = x(\lambda_o + \lambda_p + x + 1)$
- si k vaut 1, on cherche si l'équation : $\lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u_o^2$ a des solutions dans F_{2^n},
- dans l'affirmative on calcule ladite division par deux par :

$$u_o = \sqrt{u_0^{\,2}}$$

$$v_o = u_o(u_o + \lambda_o)$$

$$\text{et : } \left[\frac{1}{2}\right]P = (u_o, v_o)$$

- dans la négative, on ajoute x à ladite deuxième valeur u_o^2 et on ajoute 1 à ladite première valeur λ_o pour calculer ladite division par deux comme dans l'opération précédente;
- si k est plus grand que 1, on effectue un calcul itératif consistant à :

  chercher une valeur λ_i, telle que $\lambda_i^2 + \lambda_i = \alpha + u_{i-1}$

  puis calculer la valeur u^2_i telle que $u^2_i = u_{i-1}(\lambda_i + \lambda_{i-1} + u_{i-1} + 1)$

  en incrémentant i à partir de i=1 jusqu'à obtenir la valeur u^2_{k-1}
- on cherche si l'équation $\lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u^2_{k-1}$ a des solutions dans F_{2^n}

- dans l'affirmative on calcule ladite division par deux par :

$u_o = \sqrt{u_0^2}$

$v_o = u_o (u_o + \lambda_o)$

et $\left[\frac{1}{2}\right] P = (u_o, v_o)$

- dans la négative, on ajoute x à ladite deuxième valeur u_o^2 et on ajoute 1 à ladite première valeur λ_o pour calculer ladite division par deux comme dans l'opération précédente.

Enfin, si on choisit de représenter le point P= (x,y) par (x, λ_p) avec $\lambda_p = x + y/x$ qui donne par ladite division par deux le point $\left[\frac{1}{2}\right] P = (u_o, v_o)$ de la courbe elliptique représenté par (u_o, λ_o) avec $\lambda_o = u_o + v_0/u_0$ alors l'algorithme est conforme à l'organigramme de la figure 6 où :

- on cherche une première valeur λ_o telle que $\lambda_o^2 + \lambda_o = \alpha + x$
- on calcule une seconde valeur u_o^2 telle que $u_o^2 = x (\lambda_o + \lambda_p + x + 1)$,
- si k vaut 1, on cherche si l'équation : $\lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u_o^2$ a des solutions dans F_{2^n},
- dans l'affirmative on calcule ladite division par deux par :

$u_o = \sqrt{u_0^2}$

et $\left[\frac{1}{2}\right] P = (u_o, \lambda_o)$

- dans la négative, on ajoute x à ladite deuxième valeur u_o^2 et on ajoute 1 à ladite première valeur λ_o pour calculer ladite division par deux comme dans l'opération précédente ;
- si k est plus grand que 1, on effectue un calcul itératif consistant à :

chercher une valeur λ_i, telle que $\lambda_i^2 + \lambda_i = \alpha + u_{i-1}$

puis calculer la valeur u^2_i telle que $u_i^2 = u_{i-1} (\lambda_i + \lambda_{i-1} + u_{i-1} + 1)$

en incrémentant i à partir de i=1 jusqu'à obtenir la valeur u^2_{k-1}

- on cherche si l'équation $\lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u^2_{k-1}$ a des solutions dans F_{2^n}

- dans l'affirmative on calcule ladite division par deux par :

$$u_o = \sqrt{u_0^{\,2}}$$

$$\text{et } \left[\frac{1}{2}\right]P = (u_o, \lambda_o)$$

- dans la négative, on ajoute x à ladite deuxième valeur u_o^2 et on ajoute 1 à ladite première valeur λ_o pour calculer ladite division par deux comme dans l'opération précédente.

On va maintenant décrire comment effectuer rapidement le test, la résolution de l'équation du second degré, et le calcul de la racine carrée dans l'algorithme de division d'un point par 2. On considérera les deux cas en base normale et polynomiale.

Les résultats en base normale sont connus. On peut considérer F_{2^n} comme espace vectoriel à n dimensions sur F_2. Dans une base normale, un élément du corps est représenté par :

$$x = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \beta^{2^i} \qquad x_i \in \{0,1\}$$

où $\beta \in F_{2^n}$ est choisi tel que : $\left\{\beta, \beta^2, ..., \beta^{2^{n-1}}\right\}$ est une base F_{2^n}. Dans une base normale, la racine carrée se calcule par un décalage circulaire gauche, et l'élévation au carré par un décalage circulaire droit. Les temps de calcul correspondants sont donc négligeables.

Si l'équation du second degré : $\lambda^2 + \lambda = x$ a ses solutions dans F_{2^n}, une solution est alors donnée par :

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \beta^{2^i} \quad \text{avec : } \lambda_i = \sum_{k=1}^{i} x_i \qquad 1 \le i \le n-1$$

Le temps de calcul de λ est négligeable devant le temps de calcul d'une multiplication ou d'une inversion dans le corps. Comme le temps de calcul d'une solution de l'équation du second degré est négligeable, on peut effectuer le test de la manière suivante : calculer un candidat λ à partir de x et tester si $\lambda^2 + \lambda = x$. Si ce n'est pas le cas, l'équation n'a pas de solution dans F_{2^n}.

En base polynomiale, on utilise la représentation :

$x = \sum_{i=0}^{n-1} x_i T^i$ avec $x_i \in \{0,1\}$. La racine carrée de x peut être calculée en stockant l'élément $\sqrt{T}$ si l'on remarque que :

- dans un corps de caractéristique 2, la racine carrée est un morphisme du corps,

$$\sqrt{\sum_{i \text{ pair}} x_i T^i} = \sum_{i \text{ pair}} x_i T^{\frac{i}{2}}$$

Regroupant dans x les puissances paires et impaires de T et prenant la racine carrée, il vient :

$$\sqrt{x} = \sum_{i \text{ pair}} x_i T^{\frac{i}{2}} + \sqrt{T} \sum_{i \text{ impair}} x_i T^{\frac{i-1}{2}}$$

ainsi, pour calculer une racine carrée, il suffit de "réduire" deux vecteurs de moitié, et d'exécuter ensuite une multiplication d'une valeur précalculée par un élément de longueur n/2. C'est pourquoi le temps de calcul d'une racine carrée dans une base polynomiale est équivalent à la moitié du temps de calcul d'une multiplication dans le corps.

Pour le test et la résolution de l'équation du second degré, considérons F_{2^n} comme un espace vectoriel à n dimensions sur F_2 . L'application F définie par :

$$F : F_{2^n} \rightarrow F_{2^n}$$
$$\lambda \rightarrow \lambda^2 + \lambda$$

est alors un opérateur linéaire de noyau {0, 1}

Pour un x donné, l'équation: $\lambda^2 + \lambda = x$ a ses solutions dans F_{2^n} si et seulement si le vecteur x est dans l'image de F. Im(F) est un sous-espace de F_{2^n} à n -1 dimensions. Pour une base donnée de F_{2^n}, et le produit scalaire correspondant, il existe un seul vecteur non trivial orthogonal à tous les vecteurs de Im(F). Soit w ce vecteur. On a :

$$\exists \lambda \in F_{2^n} : \lambda^2 + \lambda = x \Leftrightarrow x \bullet w = 0$$

Ainsi l'exécution du test peut se faire en additionnant les composantes de x auxquelles correspondent des composantes de w égales à 1. Le temps d'exécution de ce test est négligeable.

Pour la résolution de l'équation du 2nd .degré : $F(\lambda) = \lambda^2 + \lambda = x$ dans une base polynomiale, on propose une méthode simple et directe imposant le stockage d'une matrice n x n. Pour cela, on cherche un opérateur linéaire G tel que :

$$\forall x \in \mathrm{Im}(F) : F(G(x)) = (G(x))^2 + G(x) = x$$

Soit $\gamma \in F_{2^n}$ un vecteur tel que $\gamma \notin \mathrm{Im}(F)$ et définissons G par:

$$G = \tilde{F}^{-1} \quad \text{avec} \quad \tilde{F}(T^i) = \begin{cases} \gamma & \text{si : } i = 0 \\ F(T^i) & \text{si : } 1 \le i \le n\text{-}1 \end{cases}$$

Etant donné $x = \sum_{i=1}^{n-1} x_i F(T^i) \in \mathrm{Im}(F)$ alors G(x) est solution de l'équation du 2nd degré. Une implémentation consiste à précalculer la matrice représentant G dans la base $\{1, T, \ldots\ldots, T^{n-1}\}$. En caractéristique 2, la multiplication d'une matrice par un vecteur se réduit à l'addition des colonnes de la matrice auxquelles correspondent un composante du vecteur égale à 1. Il s'ensuit que cette méthode de résolution d'une équation du 2nd degré consomme en moyenne n/2 additions dans le corps F_{2^n}.

On décrit ci-dessous l'application des principes exposés à la multiplication scalaire.

Soient $P \in E(F_{2^n})$ un point d'ordre r impair, c un entier aléatoire et m la partie entière de $\log_2(r)$. Calculons le produit [c]P d'un point par un scalaire en utilisant l'application de division d'un point par 2.

On démontre que :

Pour tout entier c; il existe un nombre rationnel de la forme :

$$\sum_{i=0}^{m} \frac{c_i}{2^i} \qquad c_i \in \{0,1\}$$

tel que :

$$c \equiv \sum_{i=0}^{m} \frac{c_i}{2^i} \pmod{r}$$

Soit <P> le groupe cyclique généré par P. Comme on a l'isomorphisme d'anneaux:

$$P \approx Z/rZ$$

$$[k]P \rightarrow k$$

On peut calculer la multiplication scalaire par:

$$[c]P = \sum_{i=0}^{m} \left[\frac{c_i}{2}\right] P$$

en utilisant des divisions par 2 et des additions. L'algorithme bien connu de doublement-addition peut être utilisé pour ces calculs. Il suffit pour cela de remplacer dans l'algorithme les doublements par des divisions par 2. Il faut exécuter $\log_2$ (r) divisions par 2 et, en moyenne, 1/2 $\log_2$ (r) additions. Il existe des améliorations à l'algorithme de doublement-addition qui ne demandent que 1/3 $\log_2$ (r) additions en moyenne.

Par conséquent une multiplication scalaire précitée utilisant une division par deux telle que définie ci-dessus est obtenue par les opérations suivantes :

- si ledit scalaire de la multiplication est noté S, on choisit m+1 valeurs So... Sm ∈ {0,1} pour définir S par :

$$S = \sum_{i=0}^{m} S_i \left(\frac{r+1}{2}\right)^i$$

- r étant l'ordre impair précité et m étant l'entier unique compris entre $\log_2(r) - 1$ et $\log_2(r)$,

- on calcule la multiplication scalaire [S]P d'un point P de ladite courbe elliptique par le scalaire S par application d'un algorithme consistant à déterminer la suite de points (Q_{m+1}, Q_m..., Q_i..., Q_o) de ladite courbe elliptique E telle que :

$$Q_{m+1} = O \text{ (élément neutre)}$$

$$Q_i = [S_i]P + \left[\frac{1}{2}\right] Q_{i+1} \text{ avec } o \leq i \leq m$$

- le calcul du dernier point Q_o de ladite suite donnant le résultat [S] P de ladite multiplication scalaire.

Pour additionner le point P initial à un résultat intermédiaire $Q=\left[\frac{1}{2}\right]Q_i$, on utilise l'algorithme suivant, qui est l'algorithme traditionnel, légèrement modifié:

Entrée: P = (x,y) en coordonnées affines et Q = (u, u(u + λ_Q)) représenté par (u, λ_Q)

Sortie: P + Q = (s, t) en coordonnées affines

algorithme:

1. Calculer: $\lambda = \frac{y + u(u + \lambda_Q)}{x + u}$
2. Calculer: $s = \lambda^2 + \lambda + a + x + u$
3. Calculer: $t = (s + x)\lambda + s + y$
4. Résultat: (s, t)

Cet algorithme utilise 1 inversion, 3 multiplications, et 1 racine carrée.

Le gain de temps obtenu en remplaçant les opérations de multiplication par 2 par des divisions par 2 est important. En coordonnées affines, la multiplication par 2 et l'addition demandent toutes deux: une inversion, deux multiplications, et une racine carrée. Si le scalaire de la multiplication par un scalaire est représenté par un vecteur de bits de longueur m et de k composantes non nulles, les opérations pour la multiplication scalaire demandent :

opération	doublement et addition	Division par 2 et addition
inversions	m + k	k
multiplications	2m + 2k	m + 3k
carrés	m + k	k
résolution $\lambda^2+\lambda=a+x$	0	m
racines carrées	0	m
tests	0	m

Ainsi, en utilisant la division par 2, on économise m inversions, m-k multiplications, et m carrés, au prix de m résolutions du 2^{nd}.degré, m racines carrées et m tests.

En base polynomiale, on peut obtenir une amélioration en temps d'exécution voisine de 50%.

En base normale, on estime le temps de calcul de la racine carrée, du test et de la résolution d'équation du 2nd. degré négligeable devant le temps de calcul d'une multiplication ou d'une inversion. En supposant en outre que le temps de calcul d'une inversion est équivalent au temps de calcul de 3 multiplications, on arrive à une amélioration du temps d'exécution de 55%.

La figure 2 illustre schématiquement une application possible des algorithmes décrits ci-dessus, mis en œuvre entre deux entités A et B échangeant des informations à travers un canal de communication non sécurisé. Ledit canal de communication peut se résumer ici à de simples liaisons électriques établies entre les deux entités le temps d'une transaction. Il peut aussi comporter un réseau de télécommunication, hertzien et/ou optique. En l'occurrence, ici l'entité A est une carte à microcircuit et l'entité B est un serveur. Une fois mis en relation l'une avec l'autre par ledit canal de communication, les deux entités vont appliquer un protocole de construction d'une clef commune. Pour ce faire :

- l'entité A possède une clef secrète a
- l'entité B possède une clef secrète b

Elles doivent élaborer une clef secrète x connue d'elles seules, à partir d'une clef publique constituée par un point P d'ordre impair r d'une courbe elliptique E choisie et non supersingulière.

Le protocole mis en œuvre est du type de Diffie-Hellman en remplaçant les "multiplications par deux " habituelles dites doublements de point par l'opération dite de "division par deux", selon l'invention décrite ci-dessus.

Pour ce faire, l'algorithme est le suivant :

- la première entité (par exemple A) calcule la multiplication scalaire [a]P et envoie le point résultat à la seconde entité,
- la seconde entité (B) calcule la multiplication scalaire [b]P et envoie le point résultat à la première entité,
- les deux entités calculent respectivement un point commun (C) = (x,y) de ladite courbe elliptique (E) en effectuant respectivement les multiplications scalaires [a] ([b]P) et [b] ([a]P), toutes deux égales à [a.b]P,
- les deux entités choisissent comme clef commune la coordonnée x dudit point commun (C) obtenu par ladite multiplication scalaire [a.b]P, au moins l'une

des multiplications scalaires précédentes, et de préférence toutes, étant effectuée à l'aide de divisions par deux prédéfinies.

A titre d'exemple plus précis, la figure 7 représente un serveur B relié à un réseau de communication 1 par l'intermédiaire d'une interface de communication 2, par exemple du type modem. De manière analogue, une station de calcul 3 est reliée au réseau 1 par une interface de communication 4. La station 3 est équipée d'un lecteur de carte à microcircuit 5, dans lequel est insérée la carte à microcircuit A.

La mémoire vive 6 du serveur B contient un programme 7 capable d'exécuter des calculs cryptographiques sur courbes elliptiques, et en particulier le produit d'un point par un scalaire et la division d'un point par 2.

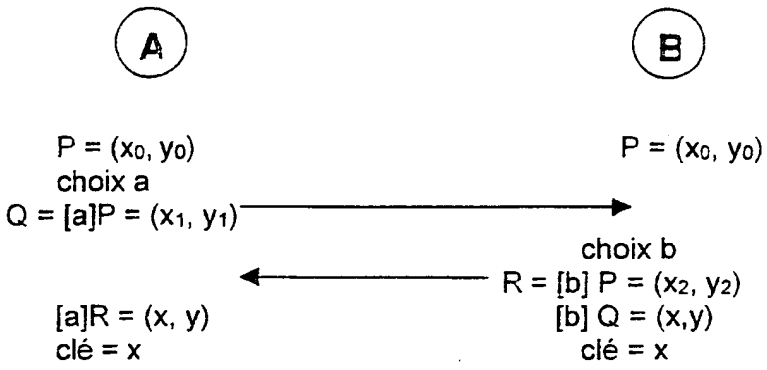
La carte A comporte une unité centrale 11, une mémoire vive dite "RAM" 8, une mémoire morte dite "ROM" 9 et une mémoire réinscriptible dite "EEPROM" 10. L'une des mémoires 9 ou 10 contient un programme 12 capable d'exécuter des calculs cryptographiques sur courbes elliptiques, et en particulier le produit d'un point par un scalaire et la division d'un point par 2.

Les deux programmes 7 et 12 ont une référence commune constituée d'une même courbe elliptique (E) et d'un même point $P=(x_0, y_0)$ de (E).

Lorsque A désire construire en parallèle avec B une clé secrète commune pour sécuriser un dialogue avec B, il choisit un scalaire $\underline{a}$ et envoie à B le produit $Q=[a]P=(x_1, y_1)$. En réponse à cet envoi, B choisit un scalaire $\underline{b}$ et retourne à A le produit $R=[b]P = (x_2, y_2)$.

A calcule alors le produit [a] R = [ab]P = (x, y), tandis que B calcule le produit [b] Q = [ab]P = (x, y), et A et B adoptent x comme clé secrète commune.

Ces opérations peuvent être représentées par le tableau ci-dessous. Celles qui sont effectuées dans le serveur B sont indiquées dans la colonne de droite tandis que celles qui sont effectuées dans la carte A sont indiquées dans la colonne de gauche, les flèches horizontales symbolisant les transferts d'informations via le réseau 1.



Une autre application possible mettant en jeu l'invention est susceptible d'être mise en œuvre entre les deux entités A et B de la figure 7. Il s'agit d'un protocole de signature d'un message M transmis entre A et B via le canal non sécurisé, c'est-à-dire le réseau 1. Le but de ce protocole, connu dans ses grandes lignes, est d'apporter la certitude que le message reçu par l'une des entités a bien été émis par celle avec laquelle elle correspond.

Pour ce faire, l'entité émettrice (par exemple A) possède deux clefs permanentes, l'une secrète a et l'autre publique Q = [a] P, P étant un point d'une courbe elliptique (E), P et (E) étant connus et convenus par A et B. Une autre clef publique est constituée par le point P d'ordre impair r de la courbe elliptique E choisie, non supersingulière. Les opérations mises en jeu impliquent des divisions par deux, au sens défini ci-dessus.

Selon un exemple possible :

- la première entité (A) possédant ladite paire de clefs permanentes construit une paire de clefs à utilisation unique, l'une (g) étant choisie arbitrairement et l'autre, [g] P résultant d'une multiplication scalaire de ladite clef (g) choisie arbitrairement par le point P public de ladite courbe elliptique, les coordonnées de cette clef ([g]P) étant notées (x,y) avec $2 \leq g \leq r-2$,

- la première entité (A) convertit le polynome x de ladite clef à utilisation unique [g]P = (x,y) en un entier i dont la valeur binaire est représentée par la séquence des coefficients binaires dudit polynôme x,

- ladite première entité (A) calcule une signature (c,d) du message (M) de la façon suivante :

$c = i$ modulo r

$d = g^{-1} (M + ac)$ modulo r,

- ladite première entité envoie ledit message (M) et ladite signature (c, d) à la seconde entité ; à réception

- ladite seconde entité (B) vérifie si les éléments de ladite signature (c,d) appartiennent chacun à l'intervalle [1, r-1],

- dans la négative, déclare la signature non valide et stoppe

- dans l'affirmative, ladite seconde entité (B) calcule trois paramètres :

$h = d^{-1}$ modulo r

$h_1 = Mh$ modulo r

$h_2 = ch$ modulo r

- ladite seconde entité calcule un point T de ladite courbe elliptique par la somme des multiplications scalaires des points P et Q par les deux derniers paramètres cités :

$T = [h_1] P + [h_2] Q$

si le point résultant T est l'élément neutre, ladite seconde entité déclare la signature non valide et stoppe.

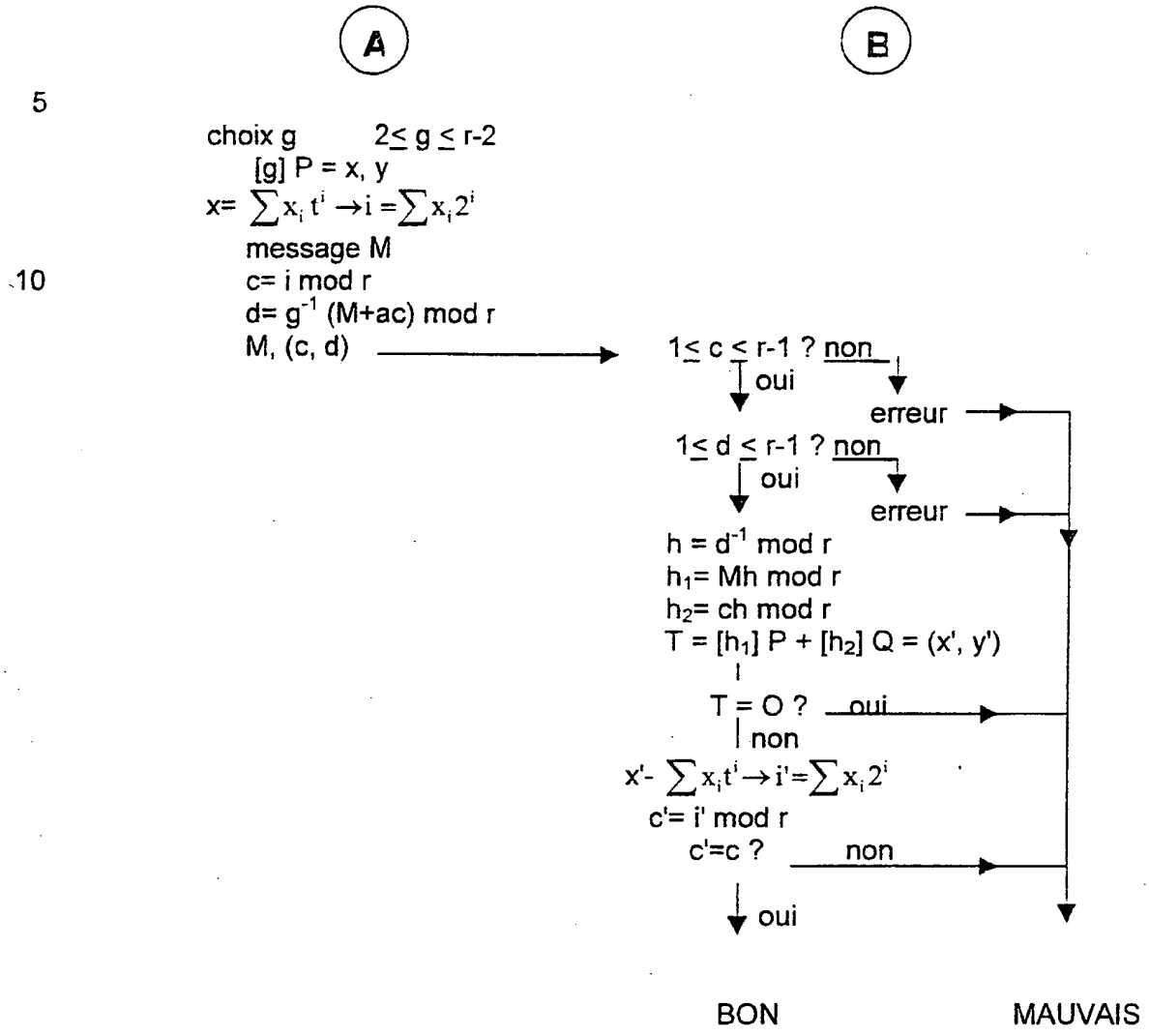
sinon, considérant le point T de coordonnées x' et y' : T = (x',y'),

- ladite seconde entité (B) convertit le polynôme x' de ce point en un entier i' dont la valeur binaire est représentée par la séquence des coefficients binaires dudit polynôme x',

- ladite seconde entité (B) calcule $c' = i'$ modulo r et,

- vérifie que $c' = c$ pour valider ladite signature ou l'invalider dans le cas contraire, au moins une opération de multiplication scalaire précitée et, de préférence toutes, étant effectuée à l'aide de divisions par deux prédéfinies.

Ces opérations peuvent être représentées par le tableau ci-dessous où les opérations effectuées dans le serveur B sont indiquées dans la colonne de droite tandis que les opérations effectuées dans la carte A sont indiquées dans la colonne de gauche, la flèche entre les deux colonnes symbolisant les transferts d'informations via le réseau 1.


A
B
choix g 2≤ g ≤ r-2
[g] P = x, y
x= ∑ x_i t^i →i =∑ x_i 2^i
message M
c= i mod r
d= g^-1 (M+ac) mod r
M, (c, d)
1≤ c ≤ r-1 ? non
oui
erreur
1≤ d ≤ r-1 ? non
oui
erreur
h = d^-1 mod r
h1= Mh mod r
h2= ch mod r
T = [h1] P + [h2] Q = (x', y')
T = O ? oui
non
x'- ∑ x_i t^i →i'=∑ x_i 2^i
c'= i' mod r
c'=c ? non
oui
BON
MAUVAIS

REVENDICATIONS

1. Procédé de cryptographie mis en œuvre entre deux entités échangeant des informations à travers un canal de communication non sécurisé, du type comprenant au moins une phase opératoire consistant à multiplier un point d'ordre impair d'une courbe elliptique non supersingulière par un entier, caractérisé en ce que, dans le but de réaliser l'échange d'informations à travers le canal de communication non sécurisé, une telle phase opératoire comprend des additions et des divisions par deux de points de ladite courbe elliptique où l'addition de points est une opération connue, et la division par deux d'un point P est définie comme le point unique D d'ordre impair tel que [2]D = P, un tel point étant noté $\left[\frac{1}{2}\right]P$, et l'opération de division par 2 : $\left[\frac{1}{2}\right]$

2. Procédé selon la revendication 1, où F_{2^n} est un corps fini de 2^n éléments, $E(F_{2^n})$ est le sous-groupe d'une courbe elliptique E, défini par :

$$E(F_{2^n}) = \{(x,y) \in F_{2^n} \times F_{2^n} \mid y^2 + xy = x^3 + \alpha x^2 + \beta\} \cup \{O\} \quad \alpha, \beta \in F_{2^n},\ \beta \neq 0$$

et $E[2^k]$ est l'ensemble des points P de ladite courbe elliptique tels que P, additionné 2^k fois à lui-même donne l'élément neutre O, avec k entier supérieur ou égal à 1, caractérisé en ce qu'un point P =(x,y) de ladite courbe elliptique donne par ladite division par deux le point $\left[\frac{1}{2}\right]P = (u_o, v_o)$ de ladite courbe elliptique, obtenu en effectuant les opérations suivantes :

- on cherche une première valeur λ_o telle que $\lambda_o^2 + \lambda_o = \alpha + x$
- on calcule une seconde valeur u_o^2 telle que $u_o^2 = x(\lambda_o + 1) + y$
- si k vaut 1, on cherche si l'équation : $\lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u^2_o$ a des solutions dans F_{2^n},
- dans l'affirmative on calcule ladite division par deux par :

$$u_o = \sqrt{u_0^2}$$

$$v_o = u_o(u_o + \lambda_o)$$

et $\left[\frac{1}{2}\right]P = (u_o, v_o)$

- dans la négative, on ajoute x à ladite deuxième valeur u_o^2 et on ajoute 1 à ladite première valeur λ_o pour calculer ladite division par deux comme dans l'opération précédente;
- si k est plus grand que 1, on effectue un calcul itératif consistant à :

chercher une valeur λ_i, telle que $\lambda_i^2 + \lambda_i = \alpha + u_{i-1}$

puis calculer la valeur u^2_i telle que $u^2_i = u_{i-1}(\lambda_i + \lambda_{i-1} + u_{i-1} + 1)$

en incrémentant i à partir de i = 1 jusqu'à obtenir la valeur u^2_{k-1}

- on cherche si l'équation $\lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u^2_{k-1}$ a des solutions dans F_{2^n}
- dans l'affirmative on calcule ladite division par deux par :

$$u_o = \sqrt{u_0^2}$$

$$v_o = u_o(u_o + \lambda_o)$$

et $\left[\frac{1}{2}\right]P = (u_o, v_o)$

- dans la négative, on ajoute x à ladite deuxième valeur u_o^2 et on ajoute 1 à ladite première valeur λ_o pour calculer ladite division par deux comme dans l'opération précédente.

3. Procédé selon la revendication 1 où : F_{2^n} est un corps fini de 2^n éléments, $E(F_{2^n})$ est le sous-groupe d'une courbe elliptique E, défini par :

$$E(F_{2^n}) = \{(x,y) \in F_{2^n} \times F_{2^n} \mid y^2 + xy = x^3 + \alpha x^2 + \beta\} \cup \{O\} \quad \alpha, \beta \in F_{2^n}, \ \beta \neq 0$$

et $E[2^k]$ est l'ensemble des points P de ladite courbe elliptique tels que P, additionné 2^k fois à lui même donne l'élément neutre O, avec k entier supérieur ou égal à 1, caractérisé en ce qu'un point P = (x,y) de ladite courbe elliptique donne par ladite division par deux le point $\left[\frac{1}{2}\right]P = (u_o, \lambda_o)$

avec $\lambda_o = u_o + v_o/u_o$ obtenu en effectuant les opérations suivantes :

- on cherche une première valeur λ_o telle que $\lambda_o^2 + \lambda_o = \alpha + x$
- on calcule une seconde valeur u_o^2 telle que : $u_o^2 = x(\lambda_o + 1) + y$
- si k vaut 1, on cherche si l'équation : $\lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u_o^2$ a des solutions dans F_{2^n},
- dans l'affirmative on calcule ladite division par deux par :

$$u_o = \sqrt{u_0^2}$$

et $\left[\frac{1}{2}\right]P = (u_o, \lambda_o)$

- dans la négative, on ajoute x à ladite deuxième valeur u_o^2 et on ajoute 1 à ladite première valeur λ_o pour calculer ladite division par deux comme dans l'opération précédente ;
- si k est plus grand que 1, on effectue un calcul itératif consistant à :

chercher une valeur λ_i, telle que $\lambda_i^2 + \lambda_i = \alpha + u_{i-1}$

puis calculer la valeur u_i^2 telle que $u_i^2 = u_{i-1}(\lambda_i + \lambda_{i-1} + u_{i-1} + 1)$

en incrémentant i à partir de i = 1 jusqu'à obtenir la valeur u^2_{k-1}

- on cherche si l'équation $\lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u^2_{k-1}$ a des solutions dans F_{2^n}
- dans l'affirmative on calcule ladite division par deux par :

$$u_o = \sqrt{u_0^{\,2}} \quad \text{et} \quad \left[\frac{1}{2}\right]P = (u_o, \lambda_o)$$

- dans la négative, on ajoute x à ladite deuxième valeur u_o^2 et on ajoute 1 à ladite première valeur λ_o pour calculer ladite division par deux comme dans l'opération précédente.

4. Procédé selon la revendication 1 où :

F_{2^n} est un corps fini de 2^n éléments, $E(F_{2^n})$ est le sous-groupe d'une courbe elliptique E, défini par :

$$E(F_{2^n}) = \{(x,y) \in F_{2^n} \times F_{2^n} \mid y^2 + xy = x^3 + \alpha x^2 + \beta\} \cup \{O\} \quad \alpha, \beta \in F_{2^n},\ \beta \neq 0$$

et $E[2^k]$ est l'ensemble des points P de ladite courbe elliptique tels que P, additionné 2^k fois à lui même donne l'élément neutre *O* avec k entier supérieur ou égal à 1, caractérisé en ce qu'un point P = (x,y) de ladite courbe elliptique représenté par (x,λ_p) avec $\lambda_p = x + y/x$ donne par ladite division par deux le point $\left[\frac{1}{2}\right]P = (u_o, v_o)$ de ladite courbe elliptique obtenu en effectuant les opérations suivantes :

- on cherche une première valeur λ_o telle que $\lambda_o^2 + \lambda_o = \alpha + x$
- on calcule une seconde valeur u_o^2 telle que : $u_o^2 = x(\lambda_o + \lambda_p + x + 1)$,
- si k vaut 1, on cherche si l'équation : $\lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u_o^2$ a des solutions dans F_{2^n},
- dans l'affirmative on calcule ladite division par deux par :

$u_o = \sqrt{u_0^2}$

$v_o = u_o (u_o + \lambda_o)$

et $\left[\frac{1}{2}\right] P = (u_o, v_o)$

- dans la négative, on ajoute x à ladite deuxième valeur u_o^2 et on ajoute 1 à ladite première valeur λ_o pour calculer ladite division par deux comme dans l'opération précédente ;
- si k est plus grand que 1, on effectue un calcul itératif consistant à :

chercher une valeur λ_i, telle que $\lambda_i^2 + \lambda_i = \alpha + u_{i-1}$

puis calculer la valeur u_i^2 telle que $u_i^2 = u_{i-1} (\lambda_i + \lambda_{i-1} + u_{i-1} + 1)$

en incrémentant i à partir de i =1jusqu'à obtenir la valeur u^2_{k-1}

- on cherche si l'équation $\lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u^2_{k-1}$ a des solutions dans F_{2^n} dans l'affirmative on calcule ladite division par deux par :

$u_o = \sqrt{u_0^2}$

$v_o = u_o (u_o + \lambda_o)$

et $\left[\frac{1}{2}\right] P = (u_o, v_o)$

- dans la négative, on ajoute x à ladite deuxième valeur u_o^2 et on ajoute 1 à ladite première valeur λ_o pour calculer ladite division par deux comme dans l'opération précédente.

5. Procédé selon la revendication 1 où : F_{2^n} est un corps fini de 2^n éléments, $E(F_{2^n})$ est le sous-groupe d'une courbe elliptique E, défini par :

$E(F_{2^n}) = \{(x,y) \in F_{2^n} \times F_{2^n} \mid y^2 + xy = x^3 + \alpha x^2 + \beta\} \cup \{O\}$ $\alpha, \beta \in F_{2^n}$, $\beta \neq 0$

et $E[2^k]$ est l'ensemble des points P de ladite courbe elliptique tels que P, additionné 2^k fois à lui même donne l'élément neutre O, avec k entier supérieur ou égal à 1, caractérisé en ce qu'un point P = (x,y) de ladite courbe elliptique représenté par (x,λ_p) avec $\lambda_p = x + y/x$ donne par ladite division par deux le point

$\left[\frac{1}{2}\right] P = (u_o, v_o)$ de ladite courbe elliptique représenté par

(u_o, λ_o), avec $\lambda_o = u_o + v_o/u_o$, obtenu en effectuant les opérations suivantes :

- on cherche une première valeur λ_o telle que $\lambda_o^2 + \lambda_o = \alpha + x$
- on calcule une seconde valeur u_o^2 telle que : $u_o^2 = x(\lambda_o + \lambda_p + x + 1)$,
- si k vaut 1, on cherche si l'équation : $\lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u_o^2$ a des solutions dans F_{2^n},
- dans l'affirmative on calcule ladite division par deux par :

$$u_o = \sqrt{u_0^2}$$

$$\text{et } \left[\frac{1}{2}\right]P = (u_o, \lambda_o)$$

- dans la négative, on ajoute x à ladite deuxième valeur u_o^2 et on ajoute 1 à ladite première valeur λ_o pour calculer ladite division par deux comme dans l'opération précédente;
- si k est plus grand que 1, on effectue un calcul itératif consistant à :

chercher une valeur λ_i, telle que $\lambda_i^2 + \lambda_i = \alpha + u_{i-1}$

puis calculer la valeur u_i^2 telle que $u_i^2 = u_{i-1}(\lambda_i + \lambda_{i-1} + u_{i-1} + 1)$

en incrémentant i à partir de i = 1jusqu'à obtenir la valeur u^2_{k-1}

- on cherche si l'équation $\lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u^2_{k-1}$ a des solutions dans F_{2^n}
- dans l'affirmative on calcule ladite division par deux par :

$$u_o = \sqrt{u_0^2}$$

$$\text{et } \left[\frac{1}{2}\right]P = (u_o, \lambda_o)$$

- dans la négative, on ajoute x à ladite deuxième valeur u_o^2 et on ajoute 1 à ladite première valeur λ_o pour calculer ladite division par deux comme dans l'opération précédente.

6. Procédé selon l'une des revendications précédentes, caractérisé en ce qu'il s'agit d'un protocole de construction d'une clef commune à partir de deux clefs secrètes appartenant respectivement aux deux entités précitées et d'une clef publique constituée par un point P d'ordre impair r d'une courbe elliptique E choisie et non supersingulière.

7. Procédé selon la revendication 6, caractérisé en ce que, de façon connue en soi, a et b étant les clefs secrètes d'une première et d'une seconde entités, respectivement

- la première entité calcule la multiplication scalaire [a]P et envoie le point résultat à la seconde entité,

- la seconde entité calcule la multiplication scalaire [b]P et envoie le point résultat à la première entité,

- les deux entités calculent respectivement un point commun C = (x,y) de ladite courbe elliptique (E) en effectuant respectivement les multiplications scalaires [a] ([b]P) et [b] ([a]P), toutes deux égales à [a.b]P,

- les deux entités choisissent comme clef commune la coordonnée (x) dudit point commun (C) obtenu par ladite multiplication scalaire [a.b]P, au moins l'une des multiplications scalaires précédentes, et de préférence toutes, étant effectuée à l'aide de divisions par deux prédéfinies.

8. Procédé selon l'une des revendications 1 à 5, caractérisé en ce qu'il s'agit d'un protocole de signature entre deux entités à partir d'une paire de clefs permanentes appartenant à l'une des entités, l'une secrète (a) et l'autre publique (Q), résultant de la multiplication scalaire de la clef secrète (a) par une autre clef publique constituée par un point (P) d'ordre impair r d'une courbe elliptique (E) choisie et non supersingulière.

9. Procédé selon la revendication 8, caractérisé par les opérations suivantes :

- la première entité (A) possédant ladite paire de clefs permanentes construit une paire de clefs à utilisation unique, l'une (g) étant choisie arbitrairement et l'autre [g]P résultant d'une multiplication scalaire de ladite clef (g) choisie arbitrairement par le point P public de ladite courbe elliptique, les coordonnées de cette clef ([g]P) étant notées (x,y) avec $2 \leq g \leq r-2$,

- la première entité (A) convertit le polynome x de ladite clef à utilisation unique [g]P = (x,y) en un entier i dont la valeur binaire est représentée par la séquence des coefficients binaires dudit polynome x,

- ladite première entité (A) calcule une signature (c,d) du message (M) de la façon suivante :

$c = i \text{ modulo } r$

$d = g^{-1} (M + ac) \text{ modulo } r$,

- ladite première entité envoie ledit message (M) et ladite signature (c, d) à la seconde entité ; à réception

- ladite seconde entité (B) vérifie si les éléments de ladite signature (c,d) appartiennent chacun à l'intervalle [1, r-1],

- dans la négative, déclare la signature non valide et stoppe,

- dans l'affirmative, ladite seconde entité (B) calcule trois paramètres :

$h = d^{-1}$ modulo r

$h_1 = Mh$ modulo r

$h_2 = ch$ modulo r

- ladite seconde entité calcule un point T de ladite courbe elliptique par la somme des multiplications scalaires des points P et Q par les deux derniers paramètres cités :

$T = [h_1] P + [h_2] Q$

si le point résultant T est l'élément neutre, ladite seconde entité déclare la signature non valide et stoppe,

sinon, considérant le point T de coordonnées x' et y' : T = (x',y'),

- ladite seconde entité (B) convertit le polynôme x' de ce point en un entier i' dont la valeur binaire est représentée par la séquence des coefficients binaires dudit polynôme x',

-ladite seconde entité (B) calcule c' = i' modulo r et,

- vérifie que c' = c pour valider ladite signature ou l'invalider dans le cas contraire, au moins une opération de multiplication scalaire précitée et, de préférence toutes, étant effectuée à l'aide de divisions par deux prédéfinies.

10. Procédé selon la revendication 7 ou 9, caractérisé en ce qu'une multiplication scalaire précitée utilisant des divisions par deux est obtenue par les opérations suivantes :

- si ledit scalaire de la multiplication est noté S, on choisit m+1 valeurs So... Sm $\in$ {0,1} pour définir S par :

$$S = \sum_{i=0}^{m} S_i \left(\frac{r+1}{2} \right)^i$$

r étant l'ordre impair précité et m étant l'entier unique compris entre $\log_2(r) - 1$ et $\log_2(r)$,

on calcule la multiplication scalaire [S]P d'un point P de ladite courbe elliptique par le scalaire S par application d'un algorithme consistant à

déterminer la suite de points (Q_{m+1}, Q_m..., Q_i..., Q_o) de ladite courbe elliptique E telle que :

Q_{m+1} = O (élément neutre)

$$Q_i = [S_i]P + \left[\frac{1}{2}\right] Q_{i+1} \text{ avec } o \leq i \leq m$$

le calcul du dernier point Q_o de ladite suite donnant le résultat [S] P de ladite multiplication scalaire.

FIG.1

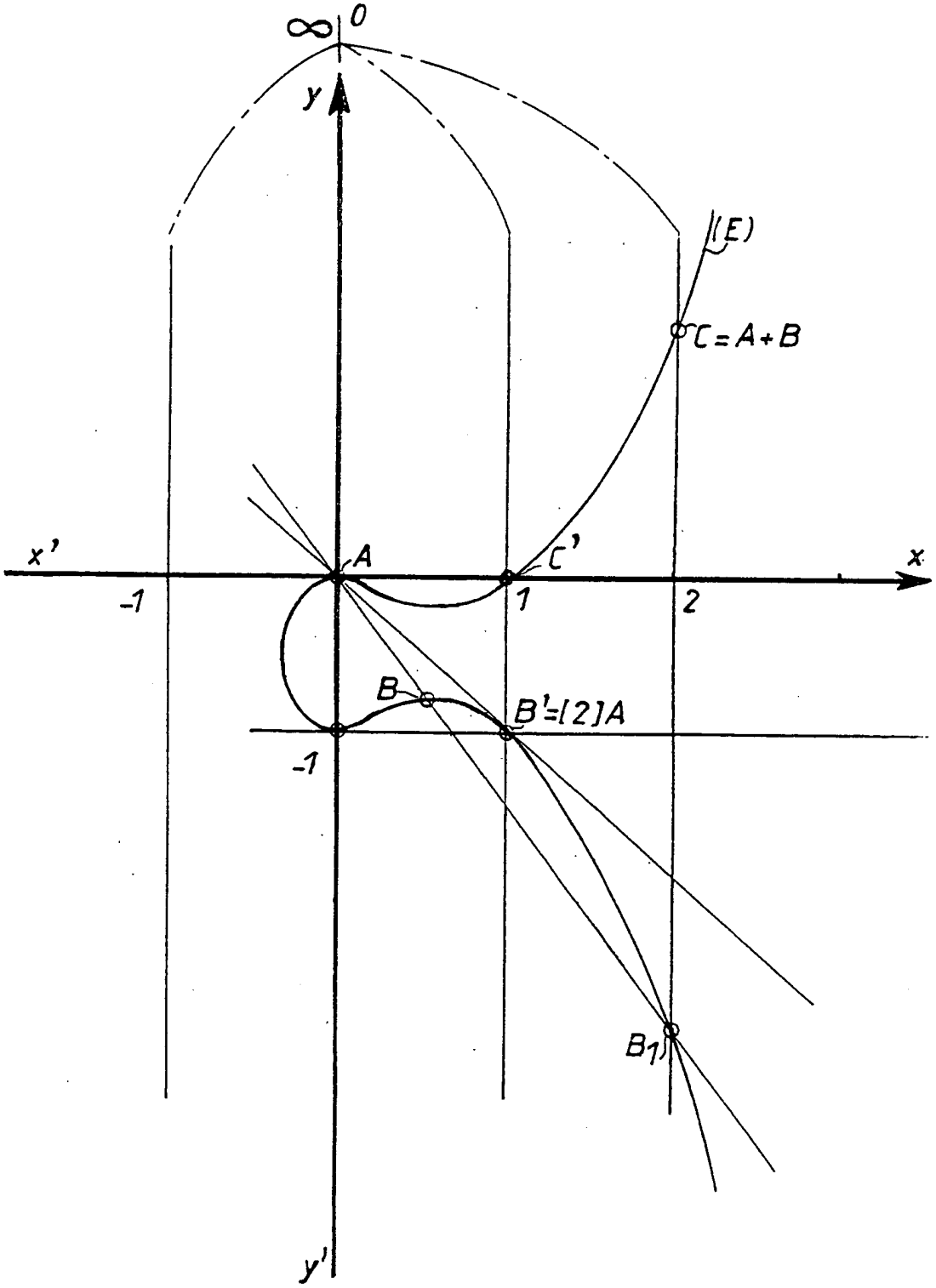


FIG. 2

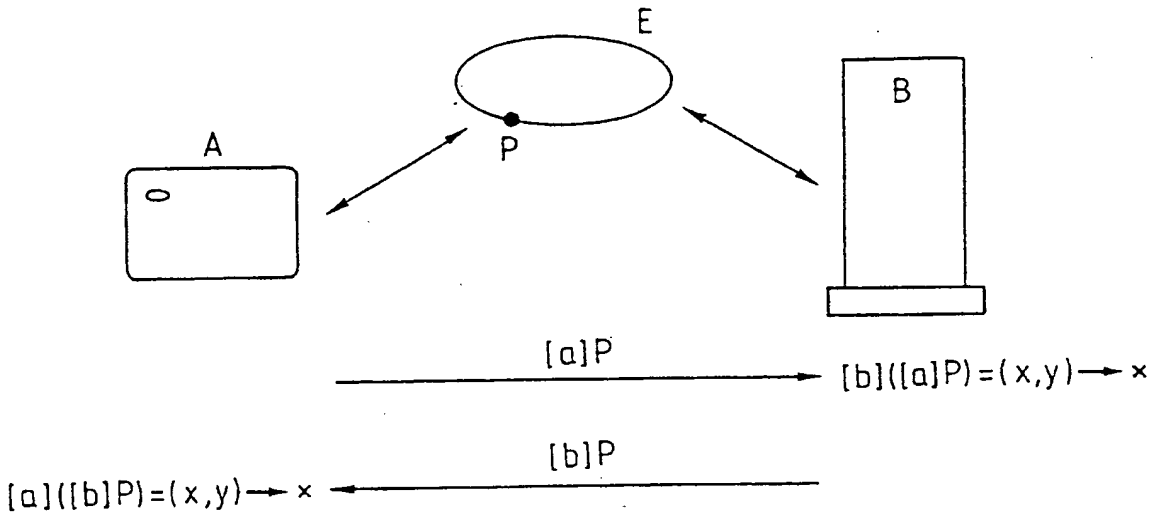


FIG. 3

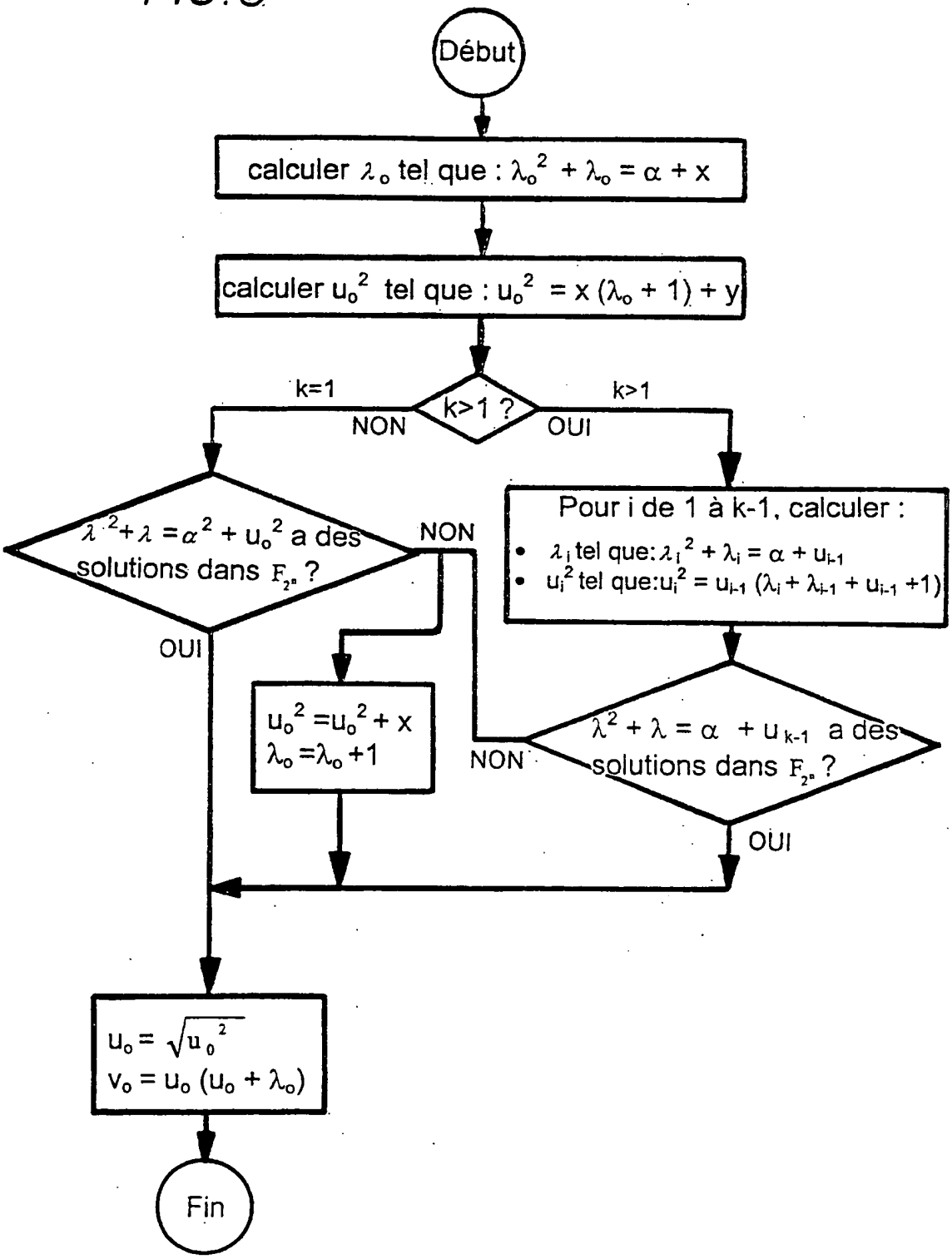

Début
calculer λ_o tel que : $\lambda_o^2 + \lambda_o = \alpha + x$
calculer u_o^2 tel que : $u_o^2 = x(\lambda_o + 1) + y$
k>1 ?
k=1
NON
k>1
OUI
$\lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u_o^2$ a des solutions dans F_{2^n} ?
NON
OUI
Pour i de 1 à k-1, calculer :
• λ_i tel que: $\lambda_i^2 + \lambda_i = \alpha + u_{i-1}$
• u_i^2 tel que: $u_i^2 = u_{i-1}(\lambda_i + \lambda_{i-1} + u_{i-1} + 1)$
$u_o^2 = u_o^2 + x$
$\lambda_o = \lambda_o + 1$
$\lambda^2 + \lambda = \alpha + u_{k-1}$ a des solutions dans F_{2^n} ?
NON
OUI
$u_o = \sqrt{u_0^2}$
$v_o = u_o(u_o + \lambda_o)$
Fin

FIG.4

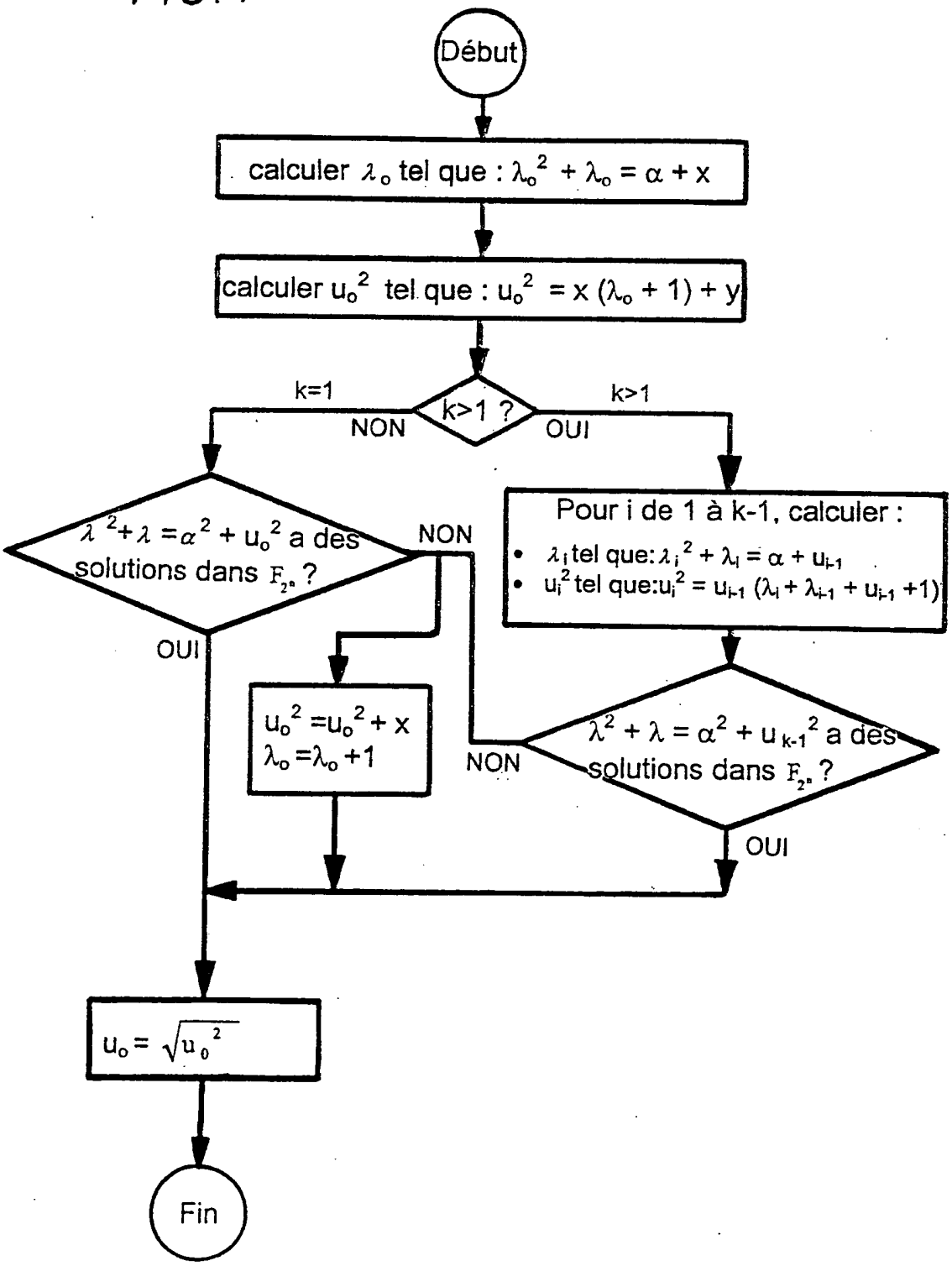

Début
calculer λ_o tel que : $\lambda_o^2 + \lambda_o = \alpha + x$
calculer u_o^2 tel que : $u_o^2 = x(\lambda_o + 1) + y$
k>1 ?
k=1
NON
k>1
OUI
$\lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u_o^2$ a des solutions dans F_{2^n} ?
NON
OUI
Pour i de 1 à k-1, calculer :
• λ_i tel que: $\lambda_i^2 + \lambda_i = \alpha + u_{i-1}$
• u_i^2 tel que: $u_i^2 = u_{i-1}(\lambda_i + \lambda_{i-1} + u_{i-1} + 1)$
$u_o^2 = u_o^2 + x$
$\lambda_o = \lambda_o + 1$
$\lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u_{k-1}^2$ a des solutions dans F_{2^n} ?
NON
OUI
$u_o = \sqrt{u_0^2}$
Fin

FIG.5

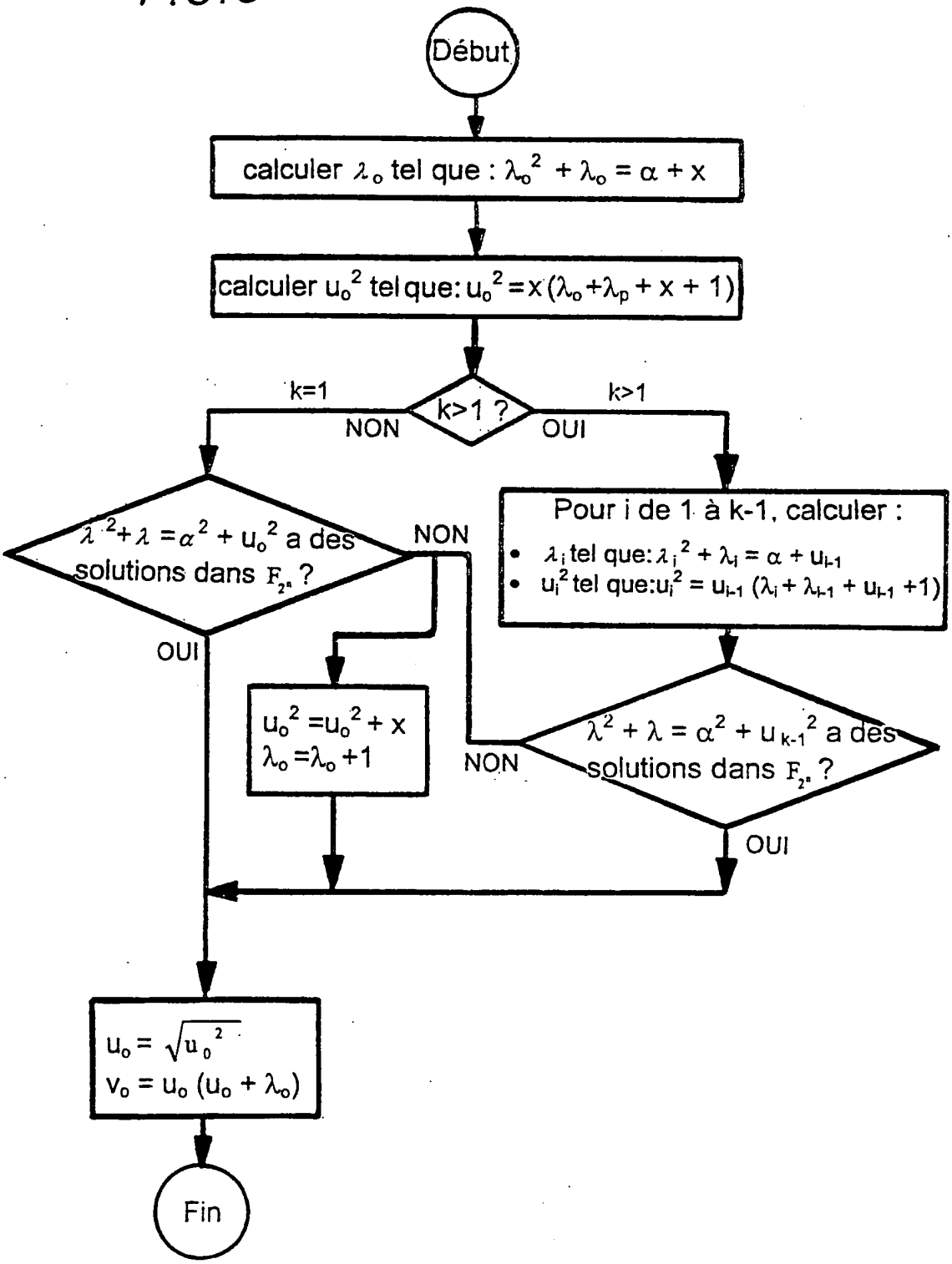

Début
calculer λ_o tel que : $\lambda_o^2 + \lambda_o = \alpha + x$
calculer u_o^2 tel que: $u_o^2 = x(\lambda_o + \lambda_p + x + 1)$
k=1
k>1 ?
k>1
NON
OUI
$\lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u_o^2$ a des solutions dans F_{2^n} ?
NON
OUI
Pour i de 1 à k-1, calculer :
λ_i tel que: $\lambda_i^2 + \lambda_i = \alpha + u_{i-1}$
u_i^2 tel que: $u_i^2 = u_{i-1}(\lambda_i + \lambda_{i-1} + u_{i-1} + 1)$
$u_o^2 = u_o^2 + x$
$\lambda_o = \lambda_o + 1$
$\lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u_{k-1}^2$ a des solutions dans F_{2^n} ?
NON
OUI
$u_o = \sqrt{u_o^2}$
$v_o = u_o(u_o + \lambda_o)$
Fin

FIG. 6

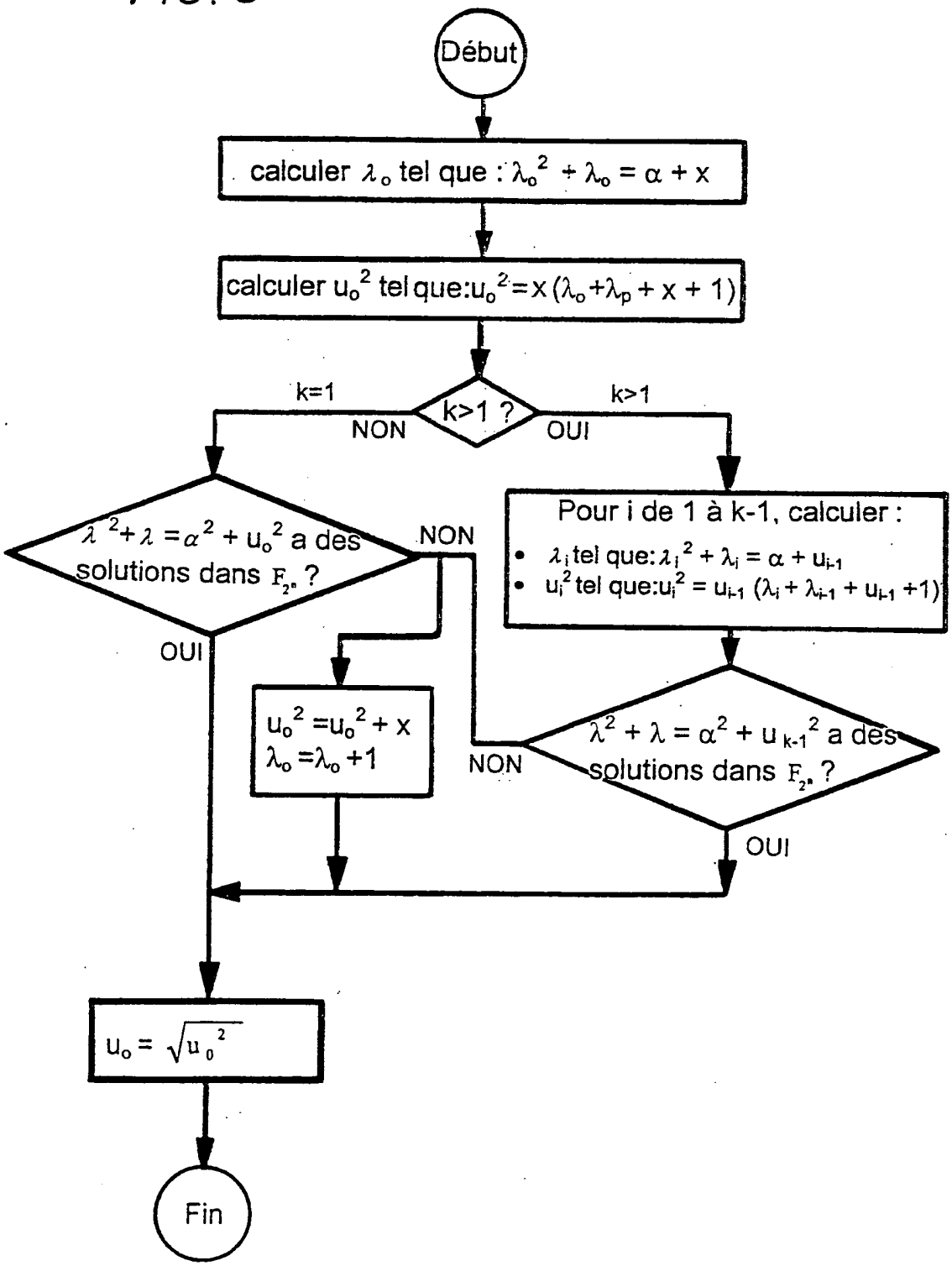
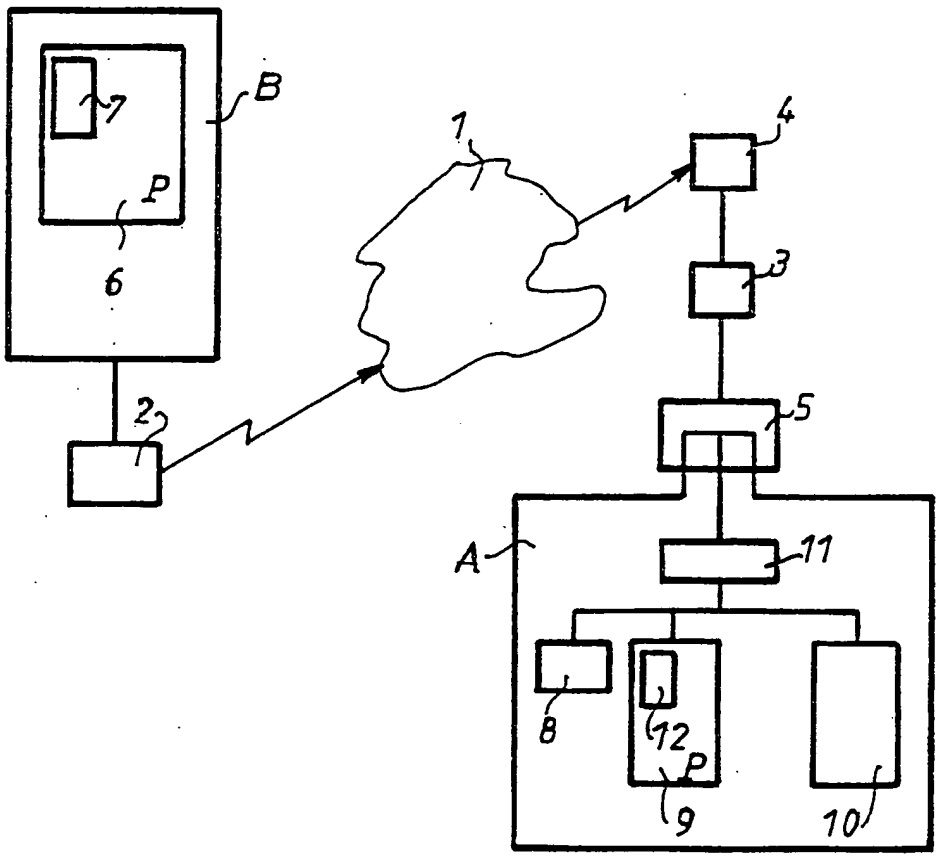

Début
calculer λ_o tel que : $\lambda_o^2 + \lambda_o = \alpha + x$
calculer u_o^2 tel que: $u_o^2 = x(\lambda_o + \lambda_p + x + 1)$
k>1 ?
k=1
NON
k>1
OUI
$\lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u_o^2$ a des solutions dans F_{2^n} ?
NON
OUI
Pour i de 1 à k-1, calculer :
• λ_i tel que: $\lambda_i^2 + \lambda_i = \alpha + u_{i-1}$
• u_i^2 tel que: $u_i^2 = u_{i-1}(\lambda_i + \lambda_{i-1} + u_{i-1} + 1)$
$u_o^2 = u_o^2 + x$
$\lambda_o = \lambda_o + 1$
$\lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u_{k-1}^2$ a des solutions dans F_{2^n} ?
NON
OUI
$u_o = \sqrt{u_0^2}$
Fin

FIG. 7



INTERNATIONAL SEARCH REPORT

Intern ial Application No
PCT/FR 00/01979

A. CLASSIFICATION OF SUBJECT MATTER
IPC 7 G06F7/72

According to International Patent Classification (IPC) or to both national classification and IPC

B. FIELDS SEARCHED

Minimum documentation searched (classification system followed by classification symbols)
IPC 7 G06F

Documentation searched other than minimum documentation to the extent that such documents are included in the fields searched

Electronic data base consulted during the international search (name of data base and, where practical, search terms used)

EPO-Internal, WPI Data, INSPEC

C. DOCUMENTS CONSIDERED TO BE RELEVANT

Category °	Citation of document, with indication, where appropriate, of the relevant passages	Relevant to claim No.
A	KENJI KOYAMA ET AL: "ELLIPTIC CURVE CRYPTOSYSTEMS AND THEIR APPLICATIONS" IEICE TRANSACTIONS ON INFORMATION AND SYSTEMS,JP,INSTITUTE OF ELECTRONICS INFORMATION AND COMM. ENG. TOKYO, vol. E75 - D, no. 1, January 1992 (1992-01), pages 50-57, XP000301174 ISSN: 0916-8532 * paragraph 4 * --- -/--	1

[X] Further documents are listed in the continuation of box C.

[ ] Patent family members are listed in annex.

° Special categories of cited documents :

"A" document defining the general state of the art which is not considered to be of particular relevance

"E" earlier document but published on or after the international filing date

"L" document which may throw doubts on priority claim(s) or which is cited to establish the publication date of another citation or other special reason (as specified)

"O" document referring to an oral disclosure, use, exhibition or other means

"P" document published prior to the international filing date but later than the priority date claimed

"T" later document published after the international filing date or priority date and not in conflict with the application but cited to understand the principle or theory underlying the invention

"X" document of particular relevance; the claimed invention cannot be considered novel or cannot be considered to involve an inventive step when the document is taken alone

"Y" document of particular relevance; the claimed invention cannot be considered to involve an inventive step when the document is combined with one or more other such documents, such combination being obvious to a person skilled in the art.

"&" document member of the same patent family

Date of the actual completion of the international search	Date of mailing of the international search report
19 October 2000	30/10/2000

Name and mailing address of the ISA	Authorized officer
European Patent Office, P.B. 5818 Patentlaan 2 NL - 2280 HV Rijswijk Tel. (+31-70) 340-2040, Tx. 31 651 epo nl, Fax: (+31-70) 340-3016	Verhoof, P

2

Form PCT/ISA/210 (second sheet) (July 1992)

INTERNATIONAL SEARCH REPORT

Intern ial Application No
PCT/FR 00/01979

C.(Continuation) DOCUMENTS CONSIDERED TO BE RELEVANT

Category *	Citation of document, with indication,where appropriate, of the relevant passages	Relevant to claim No.
A	MEYER B ET AL: "A PUBLIC CRYPTOSYSTEM BASED ON ELLIPTIC CURVES OVER Z/NZ EQUIVALENTTO FACTORING" ADVANCES IN CRYPTOLOGY - EUROCRYPT. INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE THEORY AND APPLICATION OF CRYPTOGRAPHIC TECHNIQUES,DE,BERLIN, SPRINGER, 12 May 1996 (1996-05-12), pages 49-59, XP000725434 ISBN: 3-540-61186-X * paragraph 5 *	1
X,P	KNUDSEN E W: "Elliptic scalar multiplication using point halving" ADVANCES IN CRYPTOLOGY - ASIACRYPT'99. INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE THEORY AND APPLICATIONS OF CRYPTOLOGY AND INFORMATION SECURITY. PROCEEDINGS, SINGAPORE, 14-18 NOV. 1999, pages 135-149, XP000921099 1999, Berlin, Germany, Springer-Verlag, Germany ISBN: 3-540-66666-4 the whole document	1-10

2

RAPPORT DE RECHERCHE INTERNATIONALE

Demande internationale No
PCT/FR 00/01979

A. CLASSEMENT DE L'OBJET DE LA DEMANDE
CIB 7 G06F7/72

Selon la classification internationale des brevets (CIB) ou à la fois selon la classification nationale et la CIB

B. DOMAINES SUR LESQUELS LA RECHERCHE A PORTE

Documentation minimale consultée (système de classification suivi des symboles de classement)
CIB 7 G06F

Documentation consultée autre que la documentation minimale dans la mesure où ces documents relèvent des domaines sur lesquels a porté la recherche

Base de données électronique consultée au cours de la recherche internationale (nom de la base de données, et si réalisable, termes de recherche utilisés)
EPO-Internal, WPI Data, INSPEC

C. DOCUMENTS CONSIDERES COMME PERTINENTS

Catégorie °	Identification des documents cités, avec, le cas échéant, l'indication des passages pertinents	no. des revendications visées
A	KENJI KOYAMA ET AL: "ELLIPTIC CURVE CRYPTOSYSTEMS AND THEIR APPLICATIONS" IEICE TRANSACTIONS ON INFORMATION AND SYSTEMS,JP,INSTITUTE OF ELECTRONICS INFORMATION AND COMM. ENG. TOKYO, vol. E75 - D, no. 1, janvier 1992 (1992-01), pages 50-57, XP000301174 ISSN: 0916-8532 * paragraphe 4 * --- -/--	1

[X] Voir la suite du cadre C pour la fin de la liste des documents

[ ] Les documents de familles de brevets sont indiqués en annexe

° Catégories spéciales de documents cités:

"A" document définissant l'état général de la technique, non considéré comme particulièrement pertinent

"E" document antérieur, mais publié à la date de dépôt international ou après cette date

"L" document pouvant jeter un doute sur une revendication de priorité ou cité pour déterminer la date de publication d'une autre citation ou pour une raison spéciale (telle qu'indiquée)

"O" document se référant à une divulgation orale, à un usage, à une exposition ou tous autres moyens

"P" document publié avant la date de dépôt international, mais postérieurement à la date de priorité revendiquée

"T" document ultérieur publié après la date de dépôt international ou la date de priorité et n'appartenenant pas à l'état de la technique pertinent, mais cité pour comprendre le principe ou la théorie constituant la base de l'invention

"X" document particulièrement pertinent; l'invention revendiquée ne peut être considérée comme nouvelle ou comme impliquant une activité inventive par rapport au document considéré isolément

"Y" document particulièrement pertinent; l'invention revendiquée ne peut être considérée comme impliquant une activité inventive lorsque le document est associé à un ou plusieurs autres documents de même nature, cette combinaison étant évidente pour une personne du métier

"&" document qui fait partie de la même famille de brevets

Date à laquelle la recherche internationale a été effectivement achevée	Date d'expédition du présent rapport de recherche internationale
19 octobre 2000	30/10/2000

Nom et adresse postale de l'administration chargée de la recherche internationale	Fonctionnaire autorisé
Office Européen des Brevets, P.B. 5818 Patentlaan 2 NL - 2280 HV Rijswijk Tel. (+31-70) 340-2040, Tx. 31 651 epo nl, Fax: (+31-70) 340-3016	Verhoof, P

2

RAPPORT DE RECHERCHE INTERNATIONALE

Demande internationale No
PCT/FR 00/01979

C.(suite) DOCUMENTS CONSIDERES COMME PERTINENTS

Catégorie °	Identification des documents cités, avec, le cas échéant, l'indicationdes passages pertinents	no. des revendications visées
A	MEYER B ET AL: "A PUBLIC CRYPTOSYSTEM BASED ON ELLIPTIC CURVES OVER Z/NZ EQUIVALENTTO FACTORING" ADVANCES IN CRYPTOLOGY - EUROCRYPT. INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE THEORY AND APPLICATION OF CRYPTOGRAPHIC TECHNIQUES,DE,BERLIN, SPRINGER, 12 mai 1996 (1996-05-12), pages 49-59, XP000725434 ISBN: 3-540-61186-X * paragraphe 5 *	1
X,P	KNUDSEN E W: "Elliptic scalar multiplication using point halving" ADVANCES IN CRYPTOLOGY - ASIACRYPT'99. INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE THEORY AND APPLICATIONS OF CRYPTOLOGY AND INFORMATION SECURITY. PROCEEDINGS, SINGAPORE, 14-18 NOV. 1999, pages 135-149, XP000921099 1999, Berlin, Germany, Springer-Verlag, Germany ISBN: 3-540-66666-4 le document en entier	1-10

2

THIS PAGE BLANK (USPTO)